TD 23

Applications linéaires

Dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 : [corrigé] Pour chaque application suivante : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f \circ g$ et $g \circ f$:

(Q 1) vérifier que ce sont des applications linéaires,

(Q 2) donner une base et la dimension de leur noyau et de leur image directe ;

(Q 3) vérifier le théorème du rang ;

(Q 4) dire si ce sont des isomorphismes.

$$\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3; f\left((x, y)\right) = (x, 2x + y, y)\,, \quad g\left((x, y, z)\right) = (x + z, 5x - 2y + z)\,.$$

Exercice 2 : On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires définies par :

$$f\left((x, y, z)\right) = (2x + y + z, 2x + 3y + 2z)\,, \quad g\left((x, y)\right) = (x + y, 2x + 2y, x - y)\,.$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f, g, $g \circ f$.

Exercice 3 : [corrigé] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f((x; y; z)) = (2x + y + z; x + 2y + z; x + y + 2z)$$

et soit $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - 4Id)$.

(Q 1) Donner une base de F et de G.

(Q 2) Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 4 : [corrigé] Soit λ un réel et f l'application linéaire définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \to & (x + 2\lambda y - z; 3x + \lambda z; 6x + 2z). \end{array}$$

Déterminer le rang de f en fonction de λ.

Dans d'autres espaces vectoriels

Exercice 5 : [corrigé] Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}$-linéaires ? Dans l'affirmative déterminer leur noyau et leur image puis si elles sont surjectives, injectives, des isomorphismes.

(Q 1) $r : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & Re(z) \end{array}$

(Q 2) $q : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x) - f(1)) \end{array}$;

(Q 3) E est l'ensemble des suites convergentes.
$p : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \end{array}$;

Exercice 6 : [corrigé] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1; e_2; e_3)$ une base de E.

(Q 1) Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme de E vérifiant $f(e_1) = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = -4e_2 - 2e_3$, $f(e_3) = 4e_1 + 12e_2 + 5e_3$.

(Q 2) Déterminer le noyau et l'image de f

(Q 3) Vérifier le théorème du rang pour f.

Exercice 7 : [corrigé]

(Q 1) Déterminer le rang de Φ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \to & X(P' - P'(0)) \end{array}$

(Q 2) Quelle est la dimension du noyau ? En déduire une base du noyau.

Exercice 8 : [corrigé] Soit Φ et Ψ les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]; \quad \Phi(P) = P'; \quad \Psi(P) = \int_0^X P(t)dt.$$

(Q 1) Démontrer que Φ et Ψ sont des endomorphismes.

(Q 2) Sont-ils injectifs ? surjectifs ?

(Q 3) Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

Exercice 9 : [corrigé] Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), \dots, P^{(n)}(0)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exercice 10 : [corrigé] Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On note :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' - 4f' + 4f \end{array}$$

(Q 1) Montrer que Φ est une application linéaire.

(Q 2) Donner une base de son noyau.

(Q 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. Démontrer que la restriction de ϕ à E_n est un isomorphisme.

Exercice 11 : Soit A une matrice anti-symétrique de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$: $A^T = -A$. Soit $f : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que $Y^TY = 0_{11} \Rightarrow Y = 0_{n1}$.
2. Montrer que f est un endomorphisme.
3. Soit $Y \in Im(f) \cap \ker(f)$. Montrer que $Y = 0_{n1}$.
4. Montrer que $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12 : [corrigé]

Soit un triplet $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On dit que le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ est solution du problème noté $\mathcal{PB}(a; b; c)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P(1) & = & a \\ P'(1) & = & b \\ P(2) & = & c \end{array} \right.$$

LE BUT EST DE DÉTERMINER LES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME $\mathcal{PB}(a; b; c)$ avec $(a; b; c)$ FIXES.

⚠ Les parties sont indépendantes.

(Q 1) **Pour commencer.**
 (Q a) Vérifier que $(X-1)$ est bien une solution de $\mathcal{PB}(0;1;1)$.
 (Q b) Donner une solution du problème $\mathcal{PB}(0;0;1)$.
(Q 2) Nombre de solutions ? Soit $P;Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que P et Q sont solutions du problème $\mathcal{PB}(a;b;c)$. Montrer que P est égal à Q. En déduire le nombre possible de solutions de ce problème.
(Q 3) On note

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1);P'(1);P(2)) \end{array}.$$

 (Q a) Montrer que Ψ est linéaire.
 (Q b) On pose : $P_1 = X(2-X)$: $P_2 = (X-1)(2-X); P_3 = (X-1)^2$.
  i. Montrer que $(P_1;P_2;P_3)$ est *une famille libre* de $\mathbb{R}_2[X]$ puis *une base* de cet espace vectoriel.
  ii. Calculer $\Psi(P_1);\Psi(P_2);\Psi(P_3)$.
  iii. En déduire que Ψ est surjective.
  iv. En déduire que Ψ est un isomorphisme.
 (Q c) Conclusion. Finalement, calculer $\Psi(aP_1+bP_2+cP_3)$ puis en déduire l'ensemble des solutions de problème $\mathcal{PB}(a;b;c)$.

Dans des espaces quelconques.

Exercice 13 : [corrigé] Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(Q 1) Montrer que $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f-2Id_E)$ sont en somme directe.
(Q 2) Montrer que $Im(f-Id_E) \subset \ker(f-2Id_E)$.
(Q 3) Rappeler le théorème du rang et en déduire que $\dim(E) \leq \dim(\ker(f-2Id_E)) + \dim(\ker(f-Id_E))$.
(Q 4) Rappeler la formule de Grassmann, montrer que $\dim(\ker(f-2Id_E)) + \dim(\ker(f-Id_E)) \leq \dim(E)$.
(Q 5) Montrer que $\ker(f-Id_E) \oplus \ker(f-2Id_E) = E$.

Exercice 14 : Soit E un espace vectoriel quelconque.
(Q 1) Soit f,g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = 0$. Montrer que $Im(g) \subset \ker(f)$.
(Q 2) Montrer que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(f-\alpha Id_E)\circ(f-\beta Id_E) = (f-\beta Id_E)\circ(f-\alpha Id_E).$$

(Q 3) On suppose désormais que $(f-\alpha Id_E)\circ(f-\beta Id_E) = 0$ $(\star)$ avec α,β deux réels distincts.
 (Q a) Déterminer a,b deux réels tels que $a(f-\alpha Id_E) + b(f-\beta Id_E) = Id_E$.
 (Q b) En déduire que $E = Im(f-\alpha Id_E) + Im(f-\beta Id_E)$.
 (Q c) Déduire de $(\star)$, $Im(f-\beta Id_E) \subset \ker(f-\alpha Id_E)$ et $Im(f-\alpha Id_E) \subset \ker(f-\beta Id_E)$.
 (Q d) Montrer que $E = \ker(f-\alpha Id_E) + \ker(f-\beta Id_E)$.
 (Q e) Montrer que $\ker(f-\alpha Id_E)$ et $\ker(f-\beta Id_E)$ sont en somme directe.
 (Q f) Montrer que $E = \ker(f-\alpha Id_E) \oplus \ker(f-\beta Id_E)$.

Exercice 15 : [corrigé] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que u est un automorphisme et déterminer u^{-1}.
2. Montrer que la somme $\ker(u-\mathrm{id}_E) + \ker(u^2+u+\mathrm{id}_E)$ est directe.
3. Décomposer $\frac{1}{X^3-1}$ en éléments simples (de la forme $\frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$).
4. En déduire deux polynômes P et Q tels que : $1 = (X-1)P(X) + (X^2+X+1)Q(X)$.
5. En utilisant la dernière relation en remplaçant X par u, en déduire que $\ker(u-\mathrm{id}_E)$ et $\ker(u^2+u+\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 16 : [corrigé] Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. Montrer que :

(Q 1) $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

(Q 2) $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

(Q 3) $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$

(Q 4) $\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.

(Q 5) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) + \ker(f) = E$.

(Q 6) $\ker(f) \cap \ker(g) \subset \ker(f+g)$.

(Q 7) $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 17 : [corrigé] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$

(Q 1) Démontrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ et $\ker f = \ker f^2$

(Q 2) Démontrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 18 : [corrigé] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme f de E est *nilpotent* si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$.

1. Démontrer qu'un endomorphisme nilpotent non-nul n'est pas bijectif.
2. Calculer $(Id_E - f)(Id_E + f + f^2 + ... + f^p)$ où p est un entier naturel.
3. En déduire que pour tout endomorphisme nilpotent f de E, $(Id_E - f)$ est bijectif, puis $(Id_E - \lambda f)$ est bijectif pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les symétries et les projecteurs

Exercice 19 : [corrigé] On pose $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}((-1,2,1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires puis déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G puis de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 20 : Identifier les applications suivantes (projecteurs ou symétries), puis déterminer leurs éléments caractéristiques :

(a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ ((x,y,z) & \mapsto & (3x+4y+z, -2x-3y-z, 2x+4y+2z) \end{array}$.

(b) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (y+z+t, x+z+t, -x+y-t, x-y-z) \end{array}$;

(c) $h : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} M \end{array}$;

(d) $o : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} M \end{array}$.

Exercice 21 : [corrigé] Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que si p est la projection sur F et parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$ est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 22 :

1. On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On rappelle que $E = \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Déterminer l'expression de la symétrie sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
2. Plus généralement quelle est l'expression de la symétrie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$? Justifiez rigoureusement.

Exercice 23 : [corrigé] Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on pose $f(P) = (1-X)P(0) + XP(1)$. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire ? Trouver les éléments caractéristiques de f.

Indications

Correction de l'exercice 1 :

- (Q 1) Soit $X_1 = (x_1, y_1), X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors : $\mu X_1 + \lambda X_2 = (\mu x_1 + \lambda x_2, \mu y_1 + \lambda y_2)$ donc : $f(\mu X_1 + \lambda X_2) = (\mu x_1 + \lambda x_2, 2(\mu x_1 + \lambda x_2) + \mu y_1 + \lambda y_2, \mu y_1 + \lambda y_2)$.
  Or, $(\mu x_1 + \lambda x_2, 2(\mu x_1 + \lambda x_2) + \mu y_1 + \lambda y_2, \mu y_1 + \lambda y_2) = \mu(x_1, 2x_1 + y_1, y_1) + \lambda(x_2, 2x_2 + y_2, y_2) = \mu f(X_1) + \lambda f(X_2)$.
  Au final, quels que soient $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\mu X_1 + \lambda X_2) = \mu f(X_1) + \lambda f(X_2)$ donc <u>f est linéaire.</u>

  (Q 2)
  $$f((x,y)) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = ($$
  On en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$, qui est donc de dimension nulle.
  Si l'on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2))$. Or, $f(e_1) = (1,2,0)$ et $f(e_2) = (0,1,1)$, d'où
  $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((1,2,0),(0,1,1))\,.}$
  Par ailleurs $(1,2,0)$ et $(0,1,1)$ sont clairement non colinéaires donc forment une famille libre. Elle est d'autre part génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ d'après ci-dessus. C'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.}$

  (Q 3) Nous avons bien le théorème du rang vérifié : $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)}$.

  (Q 4) $\mathrm{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ donc f n'est pas un isomorphisme.

- (Q 1) La linéarité de g se traite exactement de la même façon que la linéarité de f.

  (Q 2) $g((x,y,z)) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$
  Par conséquent : $u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow u = z(-1,-2,1)$ ce qui prouve que :
  $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((-1,-2,1)).}$ Toute famille constituée d'un vecteur non nul est libre donc $\big((-1,-2,1)\big)$ est libre et génératrice de $\mathrm{Ker}(g)$ ce qui prouve que :
  $$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1.}$$
  Si l'on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$. Or, $g(e_1) = (1,5)$, $g(e_2) = (0,-2)$ et $g(e_3) = (1,1)$. Par conséquent : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}((1,5),(0,-2),(1,1))$. De plus, $\mathrm{Vect}((1,5),(0,-2)) \subset \mathrm{Im}(g)$, ce qui prouve que $\dim(g) \geq 2$ en vertu de la liberté de deux vecteurs non colinéaires. D'autre part, $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\dim(\mathrm{Im}(g)) \leq 2$. Par double inégalité, $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2.}$

  (Q 3) Nous avons bien : $\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \mathrm{rg}(g) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

  (Q 4) $\mathrm{rg}(\mathbb{R}^3) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ donc g n'est pas un isomorphisme.

- (Q1) La composition d'applications linéaires est linéaire donc $f \circ g$ est linéaire.

  (Q2) Méthode 1 : on calcule $\mathrm{Im}(f \circ g)$ à l'aide de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Sinon, on peut utiliser cette méthode ci-dessus.
  Nous savons (exercice classique) que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ ce qui prouve que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq 2$. D'autre part, $(1,5) \in \mathrm{Im}(g)$ et $(0,-2) \in \mathrm{Im}(g)$ donc : $f((1,5)) = (1,6,5)$ et $f((0,-2)) = (0,-2,-2)$ sont deux éléments de $\mathrm{Im}(f \circ g)$. On en déduit, $\mathrm{rg}((1,6,5),(0,-2,-2)) \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f \circ g) \geq 2$ car $((1,6,5),(0,-2,-2))$ est libre (vecteurs non colinéaires) donc de rang égal à son cardinal. Au final, par double inégalité, $Im(f \circ g)$ est de dimension deux donc nécessairement égal à $\mathrm{Im}(f)$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ (cf ci-dessus) est donc une base de $\mathrm{Im}(f \circ g)$.

  (Q3) D'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f \circ g)) = 1$ donc $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Toujours par exercice classique : $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Or $\mathrm{Ker}(g)$ est de même dimension que $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ donc nécessairement : $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Une base de $\mathrm{Ker}(g)$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f \circ g)$.

  (Q4) $\mathrm{Ker}(f \circ g) \neq \{0\}$ donc $f \circ g$ n'est pas injective donc n'est pas un isomorphisme.

- (Q1) La composition d'applications linéaires est linéaire donc $g \circ f$ est linéaire.

  (Q2) $(1,2,0) \in \mathrm{Im}(g)$ et $(0,1,1) \in \mathrm{Im}(f)$ donc : $g((1,2,0)) = (1,3)$ et $g((0,1,1)) = (1,-1)$ sont deux éléments de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. On en déduit :
  $\mathrm{rg}((1,2,0),(0,1,1) \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \Leftrightarrow 2 \leq \mathrm{rg}(g \circ f)$ car $(1,2,0)$ et $(0,1,1)$ forment une famille libre (non colinéaires). D'autre part, $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donc : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq 2$. Par double inégalité, $\mathrm{rg}(g \circ f) = 2$ et donc nécessairement : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc une base de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

  (Q3) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0\}$ ce qui prouve que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0\}$.

  (Q4) f est surjective, injective et linéaire d'après ci-dessus donc est un isomorphisme.

Correction de l'exercice 3 :

(Q 1)
$$\begin{aligned} u = (x,y,z) \in F \quad & \Leftrightarrow (f - Id)(x,y,z) = 0 \\ & \Leftrightarrow f(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ & \Leftrightarrow x = -y - z \\ & \Leftrightarrow u = y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \end{aligned}$$
On en déduit : $F = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$. Par ailleurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre. Ces derniers étant

générateurs par définition, on en déduit qu'ils forment une base de F.

$$\begin{aligned} u=(x,y,z)\in G &\Leftrightarrow (f-4Id)(x,y,z)=0\\ &\Leftrightarrow f(x,y,z)-4(x,y,z)=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y+z=0\\ y=z\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=y=z\\ &\Leftrightarrow u=z(1,1,1)\end{aligned}$$

On en déduit : $G=\text{Vect}((1,1,1)$. Par ailleurs, une famille constituée d'un seul vecteur non nul est nécessairement libre. Étant génératrice par définition, cette dernière forme une base de G.

(Q 2) On constate que $((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ puisque le déterminant de cette famille est non nul. Par conséquent : $F=\text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$ et $G=\text{Vect}((1,1,1)$ sont nécessairement supplémentaires.

Correction de l'exercice 4 :

On peut déterminer explicitement $Im(f)$ en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} Im(f) &= \text{Vect}\Big(f(e_1);f(e_2);f(e_3)\Big)\\ &= \text{Vect}\Big((1;3;6);(2\lambda;0;0);(-1;\lambda;2)\Big)\end{aligned}.$$

On teste alors la liberté de la famille. Soit $x,y,z\in\mathbb{R}$ tels que

$$xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=(0,0,0).$$

Alors $(x;y;z)$ sont solutions du système linéaire homogène associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix}1&2\lambda&-1\\3&0&\lambda\\6&0&2\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&2\lambda&-1\\0&-6\lambda&\lambda+3\\0&-12\lambda&8\end{pmatrix}$$

$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&2\lambda&-1\\0&-6\lambda&\lambda+3\\0&0&2-2\lambda\end{pmatrix}$$

1. Si $\lambda=1$ alors :
$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-6&4\\0&0&0\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0&1/3\\0&1&-2/3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Ainsi, la famille $(f(e_1);f(e_2);f(e_3))$ est liée : $f(e_3)=(-1/3)f(e_1)+(2/3)f(e_2)$. Par propriété, $Im(f)=\text{Vect}(f(e_1),f(e_2))$. Cette famille de deux vecteurs est de plus libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Par conséquent, l'application linéaire est de rang 2.

2. Si $\lambda\neq 1$ alors $\begin{pmatrix}1&2\lambda&-1\\0&-6\lambda&\lambda+3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

   (a) Si $\lambda=0$ alors $\begin{pmatrix}1&2\lambda&-1\\0&-6\lambda&\lambda+3\\0&0&1\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
   Le système est alors équivalent à $x=0$ et $z=0$. Ce qui signifie que $yf(e_2)=0_{\mathbb{R}^3}$ (résultat qui peut être obtenu directement)... Par conséquent, $Im(f)=\text{Vect}(f(e_1);f(e_3))$. De même, cette famille de deux vecteurs est de plus libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Par conséquent, l'application linéaire est de rang 2.

   (b) Sinon, $\begin{pmatrix}1&2\lambda&-1\\0&1&\frac{-[\lambda+3]}{6\lambda}\\0&0&1\end{pmatrix}\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
   Finalement, $x=y=z=0$.
   La famille $(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$ est donc libre et $Im(f)$ est alors de dimension 3. Le rang de f est égal à 3.

Correction de l'exercice 5 :

(Q 1) Puisque $\text{Re}(z_1+\lambda z_2)=\text{Re}(z_1)+\lambda\text{Re}(z_2)$ car $\lambda\in\mathbb{R}$, r est $\mathbb{R}$-linéaire. Le noyau correspond aux nombres de complexes de partie réelle nulle donc à l'axe des imaginaires purs. D'après le théorème du rang $\text{rg}(r)=1$ et comme $\text{Im}(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$, nécessairement : $\text{Im}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

(Q 2) $q(f+\lambda g)=(f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(1)=f(x)-f(1)+\lambda(g(x)-g(1))$ donc $q(f+\lambda g)=q(f)+\lambda q(g)$ ce qui prouve que q est linéaire.
Le noyau est l'ensemble des fonctions telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(1)$ ce qui correspond en fait à l'ensemble des fonctions constantes.
Si $g\in\text{Im}(q)$, alors : g est de la forme : $g(x)=f(x)-f(1)$ et donc : $g(1)=0$. Réciproquement, si $g(1)=0$. Alors $g(x)=g(x)-g(1)$ donc $g=q(g)\in\text{Im}(q)$. Par double inclusion, $\text{Im}(q)$ est l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1.

(Q 3) Les opérations usuelles sur les limites de suites convergentes assurenet que p est linéaire. Le noyau de p est clairement l'ensemble des suites convergent vers 0. Nous savons que $\text{Im}(g)\subset\mathbb{R}$. D'autre part, si $x\in\mathbb{R}$, alors : $u_n=x+\dfrac{1}{2^n}$ converge vers x donc $x=p((u_n))$ ce qui prouve que $\mathbb{R}\subset\text{Im}(p)$. Par double inclusion : $\text{Im}(p)=\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) Par propriété, connaissant y_1,y_2 et y_3, il existe une unique application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ telle que : $\forall i\in[\![1;3]\!],\ f(e_i)=y_i$ car (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. En prenant : $y_1=2e_1+3e_2+e_3$, $y_2=-4e_2-2e_3$, $y_3=4e_1+12e_2+5e_3$, on en déduit le résultat.

(Q 2) Soit $x=ae_1+be_2+ce_3$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors : $f(x)=af(e_1)+bf(e_2)+cf(e_3)$ par linéarité de f. Or : $f(e_1)=2e_1+3e_2+e_3$, $f(e_2)=-4e_2-2e_3$ et $f(e_3)=4e_1+12e_2+5e_3$ donc :

$$f(x)=(2a+4c)e_1+(3a-4b+12c)e_2+(a-2b+5c)e_3.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow (2a+4c)e_1 + (3a-4b+12c)e_2 \\ &\quad +(a-2b+5c)e_3 = 0_E \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4c=0 \\ 3a-4b+12c=0 \\ a-2b+5c=0. \end{cases} \text{ par liberté de } (e_1,e_2,e_3) \end{aligned}$$

Si l'on note $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice associée au système précédent, alors à l'aide du pivot de Gauss, nous obtenons : $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = \frac{3}{2}c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = c(-2e_1 + \tfrac{3}{2}e_2 + e_3) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(-2e_1 + \tfrac{3}{2}e_2 + e_3). \end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(-2e_1 + \frac{3}{2}e_2 + e_3).}$

Par propriété :

$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2, y_3)}$, avec $y_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $y_2 = -4e_2 - 2e_3$, $y_3 = 4e_1 + 12e_2 + 5e_3$.

(Q 3) Puisque e_1, e_2, e_3 est une base, on sait que $-2e_1 + \frac{3}{2}e_2 + e_3 \neq 0_E$. Ainsi : $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1.}$ Pour déterminer la dimension de l'image, on teste si : (y_1, y_2, y_3) est libre. Or, d'après les calculs précédents,

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0_E \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = \frac{3}{2}c \end{cases}$$

En particulier, pour $c = 1$ nous obtenons : $-2y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 0_E \Leftrightarrow y_3 = 2y_1 - \frac{3}{2}y_2$. La famille est donc liée. De plus :

$\mathrm{Vect}(y_1, y_2, y_3) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ car $y_3 = 2y_1 - \frac{3}{2}y_2$. D'autre part, toujours à l'aide des calculs précédents, (y_1, y_2) est libre car $ay_1 + by_2 = 0_E \Leftrightarrow ay_2 + by_2 + 0y_3 = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \times 0 = 0 \\ b = \frac{3}{2} \times 0 = 0 \end{cases}$ Au final, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ donc (y_1, y_2) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Cette famille étant également libre, il s'agit donc d'une base de $\mathrm{Im}(f)$, ce qui prouve au final que $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.}$

Ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = 3 = \dim(E)}$ ce que vérifie le théorème du rang.

Correction de l'exercice 7 :

(Q1) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$ $= \mathrm{Vect}(0, 0, 2X^2, 3X^3) = \mathrm{Vect}(X^2, X^3)$. De plus, les polynômes sont de degrés échelonnés donc forment une famille libre. Au final, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

(Q2) D'après le théorème du rang, on en déduit que : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2$. Or, d'après la question précédente, 1 et X appartiennent au noyau. Ainsi, $\mathrm{Vect}(1, X) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Puisque, pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\mathrm{Vect}(1, X)$ est de dimension 2, nécessairement : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $(1, X)$ forme une base du noyau.

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) Il s'agit d'une conséquence de la linéarité de la dérivation et de l'intégration (cf. Cours), en constatant que $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\psi(P) \in \mathbb{R}[X]$.

(Q 2) Le noyau de φ est l'ensemble des polynômes dont le polynôme dérivé est nul donc des polynômes constants. Ainsi, φ n'est pas injective.

Soit $Q = a_nX^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, alors : $Q = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}X^{n+1} + \ldots + a_0X$ est tel que $\varphi(Q) = P$, ce qui prouve que $\mathbb{R}[X] \in \varphi$. Par double inclusion (cf question 1), $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[X]$ ce qui prouve que φ est injective.

Si : $a_nX^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, alors : $\psi(P) = Q = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}X^{n+1} + \ldots + a_0X$. Or $Q = 0$ est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, ce qui assure que $a_0 = \ldots = a_n = 0$ donc que $P = 0$. On en déduit : $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$.

Si $Q \in \mathrm{Im}(\psi)$, alors : $Q = \displaystyle\int_0^X P(t)\,dt$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$. En particulier : $Q(0) = 0$. Réciproquement, si Q est tel que $Q(0) = 0$, alors : $Q = a_nX^n + \ldots + a_1X$. En posant : $P = nX^{n-1} + \ldots + a_1$ (valable car $n \geq 1$), nous en déduisons que $\psi(P) = Q$. Ainsi, par double inclusion, $\mathrm{Im}(\psi)$ est l'ensemble des polynômes qui s'annulent en 0.

Correction de l'exercice 9 :

si $P(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0$, alors d'après l'égalité de Taylor : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k = 0$, ce qui prouve que ψ est injective. De plus $\dim(K^n) = \dim(\mathbb{K}^{n+1}) = n+1$ donc nécessairement ψ est un isomorphisme (ψ étant clairement linéaire).

Correction de l'exercice 10 :

(Q 1) Pour tous $(f;\ g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)'' - 4(f + \lambda g)' + 4(f + \lambda g)$. Or, les propriétés de la dérivation assurent que : $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$ et de même $(f + \lambda g)'' = f'' + \lambda g''$. On en déduit : $\varphi(f + \lambda g) = f'' - 4f' + 4f + \lambda(g'' - 4g' + 4g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$, donc que $\underline{\varphi \text{ est linéaire.}}$

(Q 2) Le noyau est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène : $f'' - 4f' + 4f = 0$. Son ensemble de solutions est : $S_H = \{x \mapsto (ax+b)e^{2x}, (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto xe^{2x}).}$

La famille $\mathcal{F} = (x \mapsto e^{2x}, x \mapsto xe^{2x})$ est par définition une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Elle est de plus libre. En effet : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $axe^{2x} + be^{2x} = 0 \Leftrightarrow ax + x = 0$ car $e^{2x} \neq 0$. Pour $x = 0$, on en déduit : $b = 0$ et pour $x = 1$: $a = -b = 0$. Au final :

$\boxed{\mathcal{F} = (x \mapsto e^{2x}, x \mapsto xe^{2x})}$ est une base du noyau qui donc est de dimension deux.

(Q 3)
- Le noyau de l'application restreinte à E_n correspond à l'ensemble des éléments de f de E_n qui vérifient : $f'' - 4f' + 4f = 0$. On cherche donc les polynômes de degré inférieur ou égal à n de la forme $(ax+b)e^{2x}$. Or un polynôme non nul ne peut jamais être de la forme $x \mapsto (ax+b)e^{2x}$, par exemple car un polynôme non nul admet une limite non nulle ou infinie en $-\infty$ tandis que par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} (ax+b)e^{2x} = 0$.
  Ainsi, $\ker(\psi) = \{0_{E_n}\}$ et l'application : $\psi = \varphi_{|E_n}$ est injective.
- On remarque de plus que ψ est un endomorphisme car si P est de de degré inférieur ou égal à n, alors il en est de même pour P' et P'' et donc pour $P'' - 4P' + 4P$.
  On a $\left|\begin{array}{l} \psi \text{ endomorphisme sur un ensemble de dimensi} \\ \psi \text{ est injective.} \end{array}\right.$
  Alors par théorème, ψ est bijective.
- Cette dernière étant par ailleurs linéaire, on en conclut que ψ est un isomorphisme (on pourraît même dire automorphisme puisqu'il s'agit d'un endomorphisme)

Correction de l'exercice 12 : (Q 1) (Q a) On note $P = (X-1)$. Alors $P(1) = 0; P'(1) = 1; P(2) = 1$.
Ainsi,
$\boxed{X - 1 \text{ est bien une solution de } \mathcal{PB}(0;1;1).}$

(Q b) On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 0$ et $P(2) = 1$. Alors, 1 est racine au moins double et $(X-1)^2$ divise P. Puisqu'il est de degré au plus deux, on en déduit que $P = \lambda(X-1)^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin, $P(2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$.
Ainsi,
$\boxed{\text{le problème donnée a une unique solution } (X - 1}$

(Q 2) On remarque que $P - Q$ a 1 pour racine au moins double et 2 au moins simple. Mais $P - Q$ est de degré au plus deux. Par propriété, $P - Q$ est donc le polynôme nul, ce qui montre $\boxed{P = Q.}$
Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de solution est au plus un polynôme.}}$

(Q 3) (Q a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
$$\begin{aligned} \Psi(\lambda P+Q) &= ((\lambda P + Q)(1); (\lambda P + Q)'(1); (\lambda P + Q)(2)) \\ &= (\lambda P(1) + Q(1); \lambda P'(1) + Q'(1); \lambda P(2) + Q(2)) \\ &= \lambda\Psi(P) + \Psi(Q). \end{aligned}$$
Par définition, Ψ est donc linéaire.

(Q b) i. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. On sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont aussi. On obtient donc le système linéaire suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \end{array}\right.$$
La matrice associée à ce système est :
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, le système est de rang 3 et l'unique solution est $(0;0;0)$.
$\boxed{\text{Par définition, la famille est libre}}$. Elle comporte trois vecteurs dans$\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.
$\boxed{\text{C'est donc une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

ii. On obtient :
$$\Psi(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \Psi(P_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \Psi(P_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii. Puisque l'espace de départ est de dimension finie dont une base est $(P_1; P_2; P_3)$, on sait que :
$\mathrm{Im}(\Psi) = \mathrm{Vect}\Big(\Psi(P_1); \Psi(P_2); \Psi(P_3)\Big)$. Or les images de cette base sont égales aux images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi,
$\boxed{\mathrm{Im}(\Psi) = \mathbb{R}^3}$ et par propriété,
$\boxed{\Psi \text{ est donc surjective.}}$

iv. L'application linéaire Ψ est une surjection entre deux espaces vectoriels de même dimension.
$\boxed{\text{Par propriété, } \Psi \text{ est un isomorphisme.}}$

(Q c) Puisque Ψ est linéaire, on sait que $\Psi(aP_1 + bP_2 + cP_3) = a\Psi(P_1) + b\Psi(P_2) + c\Psi(P_3) = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$. De plus, comme Ψ est un ISOMORPHISME, on sait que pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique polynôme tel que $\Psi(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow P(1) = a; P'(1) = b; P(2) = c$. Ainsi, il existe une unique solution au problème $\mathcal{PB}(a;b;c)$ qui est le polynôme :
$\boxed{aX(2-X) + b(X-1)(X-2) + c(X-1)^2}$.

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) Les espaces sont des espaces vectoriels, donc

$\{0_E\} \subset \ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 2Id_E)$.

Soit $\overrightarrow{u} \in \ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 2Id_E)$. On doit montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$. On écrit ce que $\overrightarrow{u}$ vérifie. On a $f(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$ et $f(\overrightarrow{u}) - 2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$. En effectuant la différence de ces deux égalités, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$.

Par double inclusion, $\{\overrightarrow{0}_E\} = \ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 2Id_E)$ ce qui équivaut à les espaces sont en somme directe.

(Q 2) Soit $y \in Im(f - Id_E)$. On doit montrer que $y \in \ker(f - 2Id_E)$ ce qui équivaut à montrer que $f(y) - 2y = 0_E$. Le vecteur y appartient à $Im(f - Id_E)$, donc $y = (f - Id_E)(x) \Leftrightarrow y = f(x) - x$, avec $x \in E$. On calcule donc $f(y) = f(f(x) - x) = f^2(x) - f(x)$ car f est linéaire. Alors, $f(y) - 2y = f^2(x) - f(x) - 2[f(x) - x] = f^2(x) - 3f(x) + 2x = 0_E$ d'après la relation que vérifie f. Ainsi, $y \in \ker(f - 2Id_E)$ et le résultat est démontré.

(Q 3) Par passage à la dimension, $\dim(Im(f - Id_E)) \leq \dim(\ker(f - 2Id_E)) \Leftrightarrow rg(f - Id_E) \leq \dim(\ker(f - 2Id_E))$. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(f - Id_E)) + rg(f - Id_E) = \dim(E)$. Donc

$$\boxed{\dim(E) \leq \dim(\ker(f - Id_E)) + \dim(\ker(f - 2Id_E))}$$

(Q 4) Par Grassmann, $\dim(\ker(f - Id_E)) + \dim(\ker(f - 2Id_E)) = \dim(\ker(f - Id_E)) + \ker(f - 2Id_E)) + \dim(\ker(f - Id_E)) \cap \ker(f - 2Id_E)) = \dim(\ker(f - Id_E)) + \ker(f - 2Id_E))$ car les espaces sont en somme directe. Finalement, étant donné que $\ker(f - Id_E)) + \ker(f - 2Id_E) \subset E$, on déduit l'inégalité demandée.

(Q 5) On a démontré que $\left\{ \begin{array}{r} \dim(\ker(f - Id_E)) + \dim(\ker(f - \\ \ker(f - Id_E)) \cap \ker(f - \end{array} \right.$

Par propriété, les espaces sont donc supplémentaires.

Correction de l'exercice 15 :

1. Si l'on pose : $v = u^2$, alors : $vu = uv = u^3 = \mathrm{id}_E$. Ainsi, u est bijective car elle admet une application réciproque. Étant par ailleurs linéaire ainsi qu'un endomorphisme de E ($u \in \mathcal{L}(E)$ par hypothèse), on en conclue que u est un automorphisme. Par ailleurs, $u^{-1} = u^2$.
2. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$. Alors par définitions, $u(x) = x$ et $u^2(x) + u(x) + x = 0$. Mais si $u(x) = x$, alors : $u^2(x) = u(u(x)) = u(x) = x$ et donc $u^2(x) + u(x) + x = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Puisque $x = 0$, on en déduit que l'intersection est réduite au vecteur nul et donc que la somme est directe.
3. On cherche a et b tels que : $\dfrac{1}{\underbrace{(X-1)(X^2+X+1)}_{X^3-1}} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1}$. Alors :
   - en multipliant par $X - 1$ et en appliquant en $X = 1$, on obtient : $\dfrac{1}{3} = a$;
   - en multipliant par X et faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient : $a + b = 0$;
   - en appliquant en $X = 0$ on obtient : $-1 = -a + c$.

   On déduit de tout ceci que : $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ et $c = -\frac{2}{3}$, d'où :

   $$\boxed{\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{3}\frac{X+2}{X^2+X+1}.}$$
4. En identifiant les numérateurs dl'égalité ci-dessus, il vient : $\dfrac{1}{3}(X^2+X+1) - \dfrac{1}{3}(X+2)(X-1) = 1$, d'où l'existence de $P = -\frac{1}{3}(X+2)$ et $Q = \frac{1}{3}$ tels que :

   $$\boxed{(X-1)P + (X^2+X+1)Q = 1.}$$
5. Si l'on remplace X par u, alors on en déduit : $(u - \mathrm{id}_E) \circ P(u) + (u^2 + u + \mathrm{id}_E) \circ Q(u) = \mathrm{id}_E$. Ainsi, si $x \in E$, nous avons :
   $x = (u - \mathrm{id}_E)(y_1) + (u^2 + u + \mathrm{id}_E)(y_2)$ avec $y_1 = P(u(x))$ et $y_2 = Q(u(x))$. Il nous reste à constater que :
   $x_1 = (u - \mathrm{id}_E)(y_2) \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$ car $(u^2 + u + \mathrm{id}_E)(x_1) = (u^2 + u + \mathrm{id}_E) \circ (u - \mathrm{id})(y_1) = (u^3 - \mathrm{id}_E)(y_1) = O$ puisque $u^3 = \mathrm{id}_E$ par hypothèse.
   Pour les mêmes raisons, $x_2 = (u^2 + u + \mathrm{id}_E)(y_2) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.
   Au final tout élément de $x \in E$ admet une décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \boxed{\mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)}$ et $x_2 \in \boxed{\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)}$ ce qui prouve que :
   $\mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(u - id_E) = E$. De plus, l'intersection est nulle d'après précédemment. On en déduit donc que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 16 :

(Q1) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors, par définition, $f(x) = O$. Par conséquent : $f^2(x) = f(0)$. Or $f(0) = 0$ car f est linéaire donc $f^2(x) = 0$ ce qui prouve que $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$.
On a prouvé : $x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ c'est à dire : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).}$

(Q2) Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f^2(x)$. Alors : $y = f(x_1)$ avec $x_1 = f(x)$ ce qui prouve que $y \in \mathrm{Im}(f)$.
On a prouvé $y \in \mathrm{Im}(f^2) \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est à dire : $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).}$

(Q3)
- $\Rightarrow$: On suppose que $f \circ g = 0$ et on montre qu'alors $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
  Soit $x \in \mathrm{Im}(g)$. Alors : $x = g(x_1)$ avec $g \in E$. Par conséquent : $f(x) = f \circ g(x_1) = 0$ car $g \circ f = 0$ par hypothèse. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
  Nous avons prouvé $x \in \mathrm{Im}(g) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est

à dire : $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

- $\Leftarrow$: On suppose que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et on montre que $f \circ g = 0$.
  Pour tout $x \in E$, $f \circ g(x) = f(g(x))$. Or $g(x) \in \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$ par hypothèse donc : $f(g(x)) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(Q4)
- $\Rightarrow$: On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et on montre que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
  Par double inclusion :
  - $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Alors : $x = f(x_1)$ car $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent : $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) = 0$. On en déduit $x_1 \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Or $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ par hypothèse donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui entraîne : $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
  - $\{0\} \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ est évident.
- $\Leftarrow$: On suppose $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et on veut montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. On procède alors par double inclusion pour montrer cette égalite :
  La première inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ est toujours vérifée et démontrée en (Q1). On montre donc $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Alors : $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = 0$. Par conséquent $x_1 = f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. De plus $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$ par construction donc $x_1 \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Or, par hypothèse, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc nécessairement : $x_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. On en déduit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui prouove l'inclusion souhaitée.

(Q5)
- $\Rightarrow$: On suppose : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et on veut montrer que : $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$.
  Soit $x \in E$. Alors : $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Or $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ par hypothèse, donc : $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$, c'est à dire :
  $f(x) = f^2(x_1)$ avec $x_1 \in E$. On en déduit : $f(x - f(x_1)) = f(x) - f^2(x_1) = 0$ donc : $x_2 = x - f(x_1) \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent : $x = y_1 + x_2$ avec $y_1 = f(x) \in F$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$, l'égalité précédente étant vérifiée pour tout $x \in E$.
- $\Leftarrow$: On suppose que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$ et on veut montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. On procède par double inclusion pour montrer cette égalité.
  L'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ est toujours vraie, cf. (Q2). On montre $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
  Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors : $x = f(y)$ avec $y \in E$. Puisque : $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E$, on peut décomposer : $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Par conséquent :
  $f(y) = f(y_1) + f(y_2) = f(y_1)$ car $f(y_2)$ par hypothèse. Ainsi : $x = f(y_1)$ avec $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$. On peut donc écrire : $y_1 = f(x_1)$ pour un certain $x_1 \in E$. Alors : $x = f^2(x_2)$ ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(f^2)$, donc l'inclusion souhaitée.

(Q6) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Alors : $f(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $g(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(g)$. On en déduit : $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$ ce qui prouve que : $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$.
On en déduit : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \ker(f+g).}$

(Q7) Soit $x \in \mathrm{Im}(f+g)$. Alors : $x = (f+g)(x_1)$ avec $x_1 \in E$. Alors : $x = y_1 + y_2$ avec $y_1 = f(x_1) \in \mathrm{Im}(f)$ et $y_2 = f(x_2) \in \mathrm{Im}(g)$ ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(f+g)$. On en déduit :
$\boxed{\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).}$

Correction de l'exercice 17 :

(Q1) Nous savons que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ (voir Exercice **??**). Ces deux espaces vectoriels ont de plus la même dimension car $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$. Il sont donc nécessairement égaux, c'est à dire : $\subset \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.
D'après le théorème du rang,
$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f^2) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Par ailleurs : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, toujours d'après l'exercice **??**. On en déduit : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).}$

(Q2)
- D'après le théorème du rang :
  $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).}$
- Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$:
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap Im(f)$. Alors : $f(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x = f(x_1)$ avec $x_1 \in E$ car $x \in \mathrm{Im}(f)$. On en déduit : $f^2(x_1) = f(x) = 0$ ce qui prouve que $x_1 \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Or, d'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x_1) = 0$. Puisque $x = f(x_1)$ nous obtenons $x = 0$ ce qui prouve que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}.}$

D'après les deux points précédents ainsi que d'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on en déduit que :
$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

Correction de l'exercice 18 :

1. Par l'absurde, si f est bijectif, alors f^{-1} existe donc en composant l'égalité $f^n = 0$ par $(f^{-1})^n$ à gauche, il vient : $(f^{-1})^n \circ f^n = 0$.
   Or $(f^{-1})^n f^n = (f^{-1}f)^n = \mathrm{id}_E^n = \mathrm{id}_E$. Cela nous donne alors : $\mathrm{id}_E = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, nécessairement, f n'est pas bijectif.
2. $\boxed{(Id_E - f)(Id_E + f + f^2 + ... + f^p) = Id_E - f^{p+1}.}$
3. On en déduit, en prenant $p = n-1 \in \mathbb{N}$ car $n \in \mathbb{N}^*$ par hypothèse, que : $(Id_E - f)(Id_E + f + f^2 + ... + f^{n-1}) = Id_E$. Ainsi, en posant : $g = Id_E + f + f^2 + ... + f^{n-1}$, nous obtenons : $f \circ g = Id_E$. Un calcul analogue nous donne : $g \circ f = Id_E$. Tout ceci prouve que g est l'application réciproque de $Id_E - f$ et donc que $Id_E - f$ est bijective.
   La même relation appliquée à λf donne :
   $$\boxed{(Id_E - \lambda f)(Id_E + \lambda f + \lambda^2 f^2 + ... + \lambda^p f^p) = Id_E - \lambda^{p+1} f^{p+1}.}$$
   En prenant $p = n-1 \in \mathbb{N}$ et $g = Id_E + \lambda f + \lambda^2 f^2 + ... + \lambda^{n-1} f^{n-1}$, nous obtenons :
   $\boxed{(Id_E - \lambda f) \circ g = g \circ (Id_E - \lambda f) = Id_E}$, ce qui nous

assure que $\underline{Id_E - \lambda f \text{ est bijective}}$, et ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

Correction de l'exercice 19 :

- Par Gauss Jordan, il est immédiat que $F = \text{Vect}\Big((1,1,0);(-2,0,1)\Big) = \Big\{\lambda(1,1,0)+\mu(-2,0,1)/\lambda,\mu \in \mathbb{R}^2\Big\}$
- *On souhaite montrer que F et G sont supplémentaires. On pourrait utiliser le théorème utilisant la caractérisation des espaces supplémentaires par les dimensions. Mais ce théorème ne donne pas la décomposition d'un vecteur (x,y,z) quelconque comme une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, et nous en avons besoin afin de construire cette projection...* Prenons donc un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche donc $f = \lambda(1,1,0) + \mu(-2,0,1) \in F$ et $g = \gamma(-1,2,1) \in G$ tel que

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \mu(-2,0,1) + \gamma(-1,2,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu - \gamma &= x \\ \lambda + 2\gamma &= y \\ \mu + \gamma &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu - \gamma &= x \\ 2\mu + 3\gamma &= y - x \\ \mu + \gamma &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 2x - y + 4z \\ \mu &= -y + x + 3z \\ \gamma &= y - x - 2z \end{cases}$$

Finalement :

$$(x,y,z) = \underbrace{[2x-y+4z](1,1,0) + [-y+x+3z](-2,0,1)}_{:=f} + \underbrace{[-x-2z](-1,2,1)}_{:=g}$$

On a montré que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists!(f,g) \in F \times G, (x,y,z) = f + g.$$

Par définition, les espaces sont supplémentaires.

- **Par définition, la projection sur F parallèlement à G est l'application :**

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & [2x-y+4z](1,1,0) + [-y+x+3z](-2, \end{array}$$

- **Par définition, la symétrie par rapport à G parallèlement à F est l'application :**

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & [-x-2z](-1,2,1)- \\ & & \Big([2x-y+4z](1,1,0) + [-y+x+3z](- \end{array}$$

Correction de l'exercice 21 :

D'une part, s est un endomorphisme comme combinaison linéaire d'endomorphismes. D'autre part, on calcule $s \circ s$. Puisque les endomorphismes p et id_E commutent, on a :

$$s o s = (2p - id_E) \circ (2p - id_E) = 4p^2 - 4p o id_E + id_E = 4p - 4p + id_E = id_E$$

Par propriété, s est une symétrie par rapport à $\ker(s - id_E)$ et parallèlement à $\ker(s + id_E)$.

On remarque que $s - id_E = 2(p - id_E)$. Par conséquent, les noyaux sont égaux : $\ker(s - id_E) = \ker(p - id_E)$. Ce dernier ensemble est égal à F car p est la projection sur F (tous vecteurs de F vérifient $p(f) = f$ et ce sont les seuls) et parallèlement à G.

De même, $s + id_E = 2p$. Par conséquent, $\ker(s + id_E) = \ker(p) = G$ car p est la projection sur F parallèlement à G (les vecteurs de G vérifient $p(g) = \vec{0}_E$ et ce sont les seuls).

Finalement, nous avons montré que s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Correction de l'exercice 23 :

- Montrons que f est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_4[X], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, $f(\lambda P + \mu Q) = (1-X)(\lambda P + \mu Q)(0) + X(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda\Big((1-X)P(0) + XP(1)\Big) + \mu\Big((1-X)Q(0) + XQ(1)\Big) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
Par définition, l'application est linéaire.
- De plus, $f(P) \in \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_4[X]$. Par ces deux points, f est un endomorphisme.
- Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Alors $f \circ f(P) = f(f(P)) = f((1-X)P(0) + XP(1)) = (1-X) \times \Big[(1-0) \times P(0) + 0 \times P(1)\Big] + X\Big[(1-1)P(0) + 1 \times P(1)\Big]$
$= (1-X)P(0) + XP(1) = f(P)$ Donc, $f \circ f = f$.
- On sait que $\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X]) \\ f \circ f = f. \end{array} \right.$ Par théorème, l'application f est un projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.
- Calculons les. Puisque l'espace de départ est de dimension finie dont une base est $(1, X, X^2, X^3, X^4)$, on sait que

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\Big(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4)\Big)$$

$$= \text{Vect}\Big(1, X, X, X, X\Big) = \boxed{\text{Vect}\Big(1, X\Big)}.$$

Soit $P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbb{R}_4[X]} \Leftrightarrow (1-X)P(0) + XP(1) = 0_{\mathbb{R}_4[X]}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) &= 0 \\ P(1) - P(0) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) &= 0 \\ P(1) &= 0 \end{cases}$$

Prenons alors $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On obtient alors $e = 0$ et $a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a = -b - c - d$. Ainsi,

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow P = b(X^3 - X^4) + c(X^2 - X^4) + d(X - X^4)$$

Finalement,

$$\boxed{\ker(f) = \text{Vect}\Big((X^3 - X^4); (X^2 - X^4); (X - X^4)\Big)}$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆